

## Stelling

Als er  $a_1, \dots, a_n \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$  en  $b_1, \dots, b_m \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$  bestaan,  $p_1, p_2 \in \{(\bar{0}), (\bar{1})\}$  zodanig dat  $a_1 \dots a_n \bar{0} p_1 = b_1 \dots b_m \bar{1} p_2$  dan is  $L$  geen wolk.

## Bewijs

def  $L$  is geen wolk als  $\forall \delta \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^2$   $x_1 = (\bar{0}) \wedge x_n = (\bar{1})$   
 $\forall i < n \quad |x_i - x_{i+1}| < \delta$

Dus moeten we een methode geven om een reeks van punten te construeren die aan deze eis voldoet.

We geven allereerst een grammatica voor de lijn in de

vorm:  $\mathbb{L} = t_1 \circ \mathbb{L} \quad x_1 \quad t_2 \circ \mathbb{L} \quad x_2 \quad \dots \quad x_p \quad t_{p+1} \circ \mathbb{L}$

$t_i \in \{\bar{0}, \bar{1}\}^*$   $x_i \in \{(\bar{0}), (\bar{1})\}$

$t_i$  is altijd een verkleinende transformatie. Ook geldt dat alle punten  $x_i$  binnen de eenheidscircel rond  $(\bar{0})$  liggen. Dit betekent dat als we de lijn tussen 2 punten  $x_i$  en  $x_{i+1}$  verder uitwerken, al de punten die hier uit voortkomen ook binnen een verkleinde eenheidscircel rond een van de punten  $x_i$  en  $x_{i+1}$  liggen. Dus door middel van puntrele uitschrijving van deze grammatica is het altijd mogelijk een gewenste reeks te verkrijgen.

Nu hoeven we alleen nog de constructie van de grammatica te geven.

$\exists j$  zodanig dat  $x_j = a_1 \dots a_n \bar{0} p_1 = b_1 \dots b_m \bar{1} p_2$

we beschrijven alleen de constructie van het stuk tot  $x_j$ .

We veronderstellen dat  $(a_1 = \bar{1} \wedge p_1 = (\bar{0})) \vee (a_1 = \bar{0} \wedge p_1 = (\bar{1}))$

$j$  is gelijk aan het aantal groepen opeenvolgende  $\bar{1}$ -en en  $\bar{0}$ -en.

(Dus  $\bar{0}\bar{0}\bar{1}\bar{0}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$  heeft 4 groepen). Ofwel  $a_1 \dots a_n \bar{0}$  kan

geschreven worden als  $g_1 \dots g_j$  waarbij  $g_{2k} \in \bar{0}^*$   $\wedge$   $g_{2k+1} \in \bar{1}^*$

$$t_i = g_{j-i+1} \dots g_j$$

$$x_i = g_{j-i+1} \dots g_j p_i$$

$$p_{2k+1} = (\bar{1}) \quad \wedge \quad p_{2k} = (\bar{0})$$

Er geldt ( $i < j$ ) dat  $g_{j-i+1} \dots g_j p_i = g_{j-i} \dots g_j p_i$  (want  $g_{j-i} p_i = p_i$ ).

Dit betekend dat  $x_{i-1} \quad t_i \circ \mathbb{L} \quad x_i$  te schrijven is als

$t_i p_{i-1} t_i \circ \mathbb{L} \quad t_i p_i$ . Daar  $\{p_{i-1}, p_i\} = \{(\bar{0}), (\bar{1})\}$  betekend dit dat het een projectie van de lijn op zichzelf is. Hiermee hebben we een grammatica van de lijn bestaat uit een reeks punten, overbrugd door projecties van de lijn zelf.

~~Verder~~

gegeven:  $a, b, \varphi$

$$0 \leq a \leq 1 \quad 0 \leq b \leq 1 \quad \text{of } \varphi \in \mathbb{R}$$

definiëer twee afbeeldingen:  $\bar{o}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} bx+1-b \\ by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b(x-1) \\ by \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-b \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\bar{i}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto a \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gegeven

$$D(n \in \mathbb{N}) = (d_0, d_1, \dots, d_n) \in \{\bar{o}, \bar{i}\}^n$$

waarbij  $\sum_{i=0}^n d_i \cdot 2^i = x \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad d_n \leq 1 \quad \vee \quad (d_n = 1 \wedge n=0)$

$$D(x \in [0, 1]) = (d_1, d_2, \dots)$$

waarbij  $\sum_{i=1}^{\infty} d_i \cdot 2^{-i} = x$

$$(d_1, \dots, d_n) \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (d_1, \dots, d_n) \circ \bar{d}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$() \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$R_D \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{array}{l} (d_1, \dots, d_i) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ (d_1, \dots, d_i, \dots) = D \quad \wedge \quad 0 \leq i \leq \infty \end{array} \right\}$$

afelbaar oneindige verzameling

$$R \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{array}{l} (d_1, \dots, d_i) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ (d_1, \dots, d_i, \dots) = D(x) \quad \wedge \quad 0 \leq i \leq \infty \quad \wedge \quad x \in [0, 1] \end{array} \right\}$$

ofwel  $(d_1, \dots, d_n) \in \{0, 1\}^n \quad \wedge \quad 0 \leq n \leq \infty$

$$\} = \{ P \mid P \in R_D \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \quad \wedge \quad x \in [0, 1] \}$$

deze verzameling is overafelbaar.

$$F_D = \{ P \mid P = D \circ P \}$$

$\rightarrow$  onder welke condities geldt  $|F_D| = 1$

aan deze condities zijn (waarschijnlijk) altijd voldaan.  
 $\sim (a=1 \wedge b=1)$

$$F = \{ P \mid P = (d_1, \dots, d_n) \circ P$$

~~voor alle  $n \in \mathbb{N}$~~

$$(d_1, \dots, d_n) \in \{0, 1\}^n \quad \wedge \quad 0 \leq n < \infty$$

ofwel  $(d_1, \dots, d_n) = D(x) \quad \wedge \quad x \in \mathbb{N}$

$$\}$$

deze verzameling is afelbaar

$$L = \left\{ \begin{array}{l} P \\ P \in R_{P'} \quad \wedge \quad P' \in F \end{array} \right\}$$

deze verzameling is overafelbaar.

$$R_D \cdot P = \{ (d_1, \dots, d_i) \circ p \mid (d_1, \dots, d_i, \dots) = D \text{ en } 0 \leq i < \infty \}$$

$$R_P = \bigcup_{x \in [0,1]} P_{D(x)} P$$

$$F_D = \{ p \mid p = D \circ p \}$$

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{D(n)}$$

$$RL = \bigcup_{p \in F} R_P$$

vermeeden dat

$$\forall p \in F \quad (L = R_p)$$

$$\text{of } \forall p \in L \quad (L = R_L)$$

} oftewel ongeacht het startpunt is ieder punt een voortbrenger van de hele verzameling.

$$R_V = \bigcup_{\substack{x \in [0,1] \\ p \in V}} R_{D(x)} P$$

$$(d_1, \dots, d_n) \circ p = (d_1, \dots, d_n) \circ (\bar{d}_1 p) \quad () \circ p = p$$

$$L = \{ \bar{1} d \mid d \in L \} \cup \{ \bar{0} d \mid d \in L \}$$

$$L = \bar{0} L \cup \bar{1} L$$

$$\begin{aligned} \bar{0} v &= \{ \bar{0} p \mid p \in v \} \\ \bar{1} v &= \{ \bar{1} p \mid p \in v \} \end{aligned}$$

$$\bar{0} p = b p + \begin{pmatrix} 1-b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{1} p = a \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} p$$

De reekes  $L_0 = C \{ p \mid |p| \leq 1 \}$

$$L_n = \bar{0} L_{n-1} \cup \bar{1} L_{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L$$

} het convergeert altijd naar het zelfde! mits  $L_0 \neq \emptyset$

$$\forall p \in F$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} \exists p' \in L \quad (|p' - p| < d)$$

sterker nog  $\lim_{d \rightarrow 0} |\{ p' \in L \mid |p' - p| < d \}| = \infty$

~~De verzameling~~

Ook wel  $\forall p \in F$

geldt dat  $R_p$  nadert naar alle  $p' \in F$

In het bijzonder geldt dat  $\forall x \in \mathbb{Q}$

~~De verzameling wordt afgesloten~~  
 $D(x) = D_u \cdot D_r^*$  ( $\rightarrow$  dit kan omdat  $x \in \mathbb{Q}$ )

dat  $R_D$  nadert willekeurig dicht naar  $F_{D_r}$

(Dit kan bewezen worden door te vermoeden dat geldt

~~De verzameling~~  $D_0\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = R \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + P$ )

hiervolgt dus dat er aflebaar oneindig reksen zijn die naar dit punt gaan, en wel de volgende

$$\forall u \in \mathbb{N} \quad R(D_u \cdot D_r^*) \text{ gaat willekeurig dicht naar } F_{D_r}$$

Dus kan gesteld worden dat  $\forall p \in F$  geldt dat het verdichtingspunten in  $L$  zijn.

$$V(L) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{N_d}{d^d} \quad \text{where } N_d = \#\{p \in L \mid \exists p' \in L \text{ s.t. } |p-p'| < d\}$$

$$C_p = \{ (x', y') \mid (x'-x)^2 + (y'-y)^2 < d \}$$

$$V(L) > 0 \text{ als } \exists! p, d > 0 \quad (C_{p,d} \subset L)$$

$$\text{Is dit vraag } \exists a, b, \varphi \quad (V(L) > 0) \quad ?$$

$$L \subset [0,1] \times [0,1] \times [0,\pi]$$

$$L = \{ (a, b, \varphi) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,\pi] \mid V(L_{a,b,\varphi}) > 0 \}$$

Wat is de vorm van  $L$  het "oppervlakte" van  $L$

(Wat is de fractal dimensie van  $L$ )

Is  $L$  samenhangend??

$$C(L) = \forall p \in L \quad \left( \lim_{d \rightarrow 0} \frac{N_d(p)}{d^d} > 0 \right)$$

$$V(L) > 0 \not\Rightarrow C(L)$$

$$|\{p' \mid |p-p'| < d\}| = |\mathbb{R}|$$

$$C = \{ (a, b, \varphi) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,\pi] \mid C(L) \wedge V(L) = 0 \}$$

Bewering:  $C$  is oppervlakte van  $L$

Het is mogelijk dat  $C$  punten bevat die niet oppervlakte van  $L$  zijn.

Oppervlakte van  $L$  zijn alle  $p$  die willekeurig dicht bij  $L$  liggen, maar geen element van  $L$  zijn.

$$= \{ p \mid \lim_{d \rightarrow 0} \frac{N_d(p)}{d^d} > 0 \}$$

Is  $C$  samenhangend als  $L$  niet samenhangend is?

~~kandidaten voor~~

Om de vraag  $\exists a, b, p \quad (v(L) > 0)$  te beantwoorden moeten we zoeken naar een circeltje rond een  $p$  waarvoor geldt dat  $R_{p,r} \cap C_{p,r} \subset R_{p,r}$

Dere  $p$  moet in de buurt van een punt uit  $F$  liggen.  
 $\Rightarrow$  kies een  $p \in F$  we kunnen (\*) hiervoor kiezen



~~We kunnen we nu de volgende~~

Dus onderzoeken of  $C_{(0),r} \subset R_{(0),r}$

( als er een  $r$  bestaat waarvoor  $C_{(0),r} \subset R_{(0),r}$  dan bestaat er ook zo'n circeltje rond  $\forall p \in F$ , en misschien wel rond  $\forall p \in \mathbb{R}$ . lijkt zeer aannemelijk!

$\Rightarrow$  bewijst tevens dat het samenhangend moet zijn.

(Wat er te  $r$  van (\*) is waarschijnlijk het grootste!!)

Twee gevallen

- een eindige <sup>deel</sup>verandering van  $R_{p,r}$  overdekt  $C_{p,r}$
- een oneindige deelverandering van  $R_{p,r}$  overdekt  $C_{p,r}$

$\Rightarrow$  voor iedere  $n$  bestaat er een  $L_n$  zodanig dat voor alle  $(a,b,q) \in L_n$  geldt dat (\*) overdekt wordt door  $n$  cirkels uit  $R_{p,r}$ .

Nu geldt  $L_{n+1} \subseteq L_n$   
 en dat  $L \subseteq \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$

bestaat  $L_1$  ?? wat is de kleinste  $n$  waarvoor  $L_n$  volame  $\neq \emptyset$

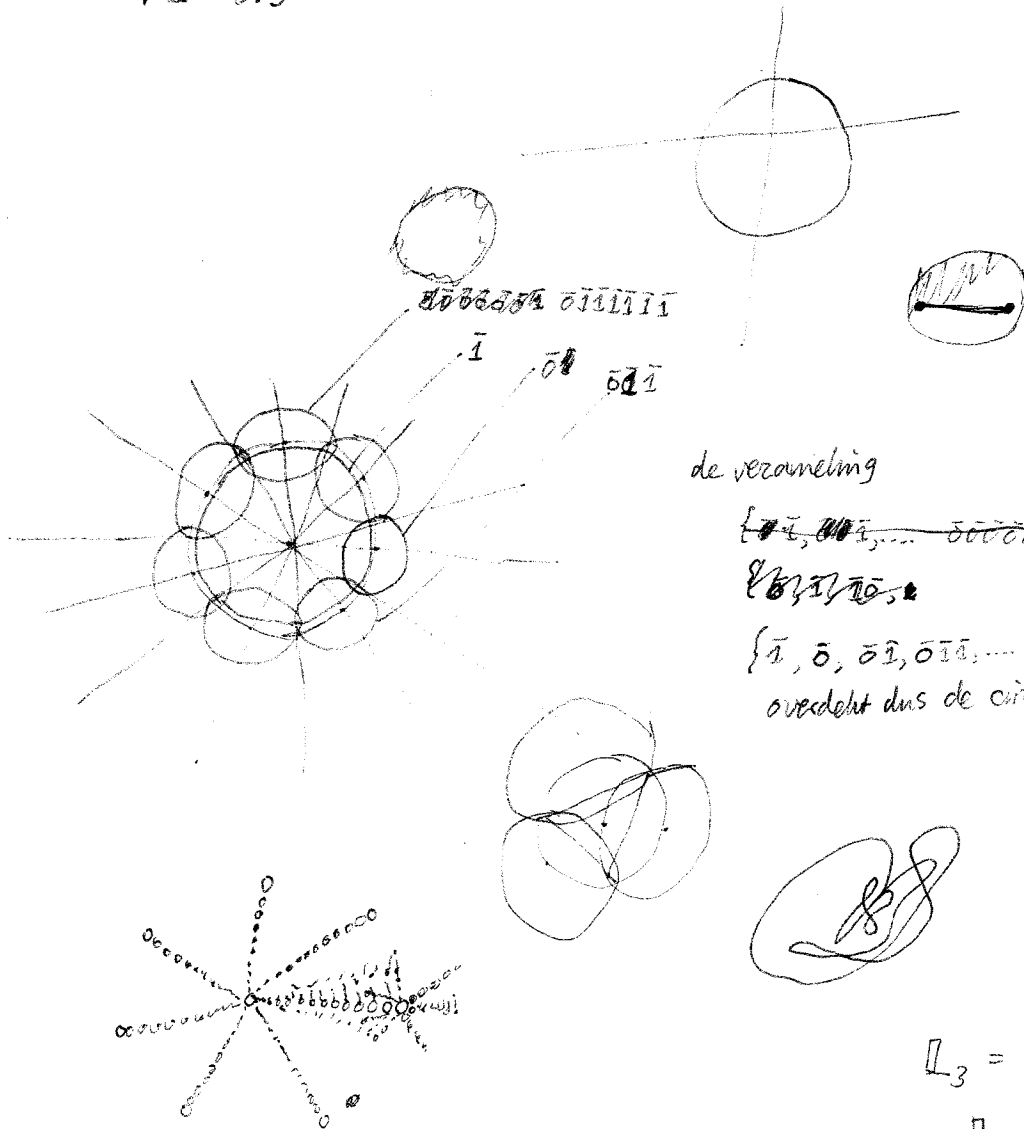
beschaf van  $\mathbb{Z}[a,b,\varphi]$  ( $\varphi(2) > 0$ )

neem  $a = 0.9999$

$b = 0.5...$

$\varphi = \frac{2\pi}{7}$

$r = 0.5$



de verzameling

$\{11111111, 1111111, \dots, 00000000\}$

$\{11111111, 1111111, \dots, 00000000\}$

$\{11111111, 1111111, \dots, 00000000\}$

overdekt dus de cirkel met straal 0.5

$\mathbb{I}_3 = \emptyset$  behalve voor  $a=1$

$\mathbb{I}_4$

Het lijkt er op dat de waarde van  $\varphi$  het meest kritisch is!

voor gegeven  $a, b, \varphi$

$\mathbb{I}_n$

bestaat er een  $r > 0$  zodanig dat

$C_{(a,b,\varphi),r} \subset R \subset C_{(a,b,\varphi),r}$

$\mathbb{I}_n = \{ (a,b,\varphi) \mid \exists r > 0 \wedge C_{(a,b,\varphi),r} \subset R_D \subset C_{(a,b,\varphi),r} \wedge D \in \{0,1\}^n \}$

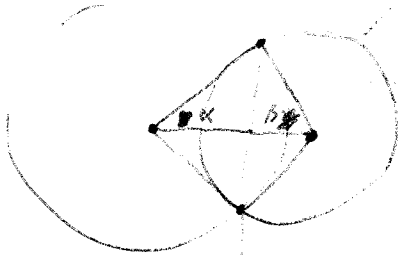
$\mathbb{I}_n(\varphi) = \{ (a,b) \mid \exists r > 0 \wedge C_{(a,b,\varphi),r} \subset R_D \subset C_{(a,b,\varphi),r} \wedge D \in \{0,1\}^n \}$

zelfs de verzameling  $\{ (a,b) \mid C_{(a,b,\varphi),r} \subset R_D \subset C_{(a,b,\varphi),r} \wedge D \in \{0,1\}^n \}$  is al zeer ingewikkeld.

opposite sides of overlapping circles

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$(x-1+b)^2 + y^2 = b^2$$



$$\frac{a^2 + 1 - 2b}{2(1-b)}$$

$$\frac{a^2 - b^2 + (1-b)^2}{2c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{a^2 + 1 - 2b}{2(1-b)}}{a} = \frac{a^2 + 1 - 2b}{2a(1-b)}$$

$$\frac{a^2 + 1 - 2b}{2a(1-b)}$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{2(1-b)^2}{2(1-b)} - \frac{a^2 + 1 - 2b}{2(1-b)}}{b}$$

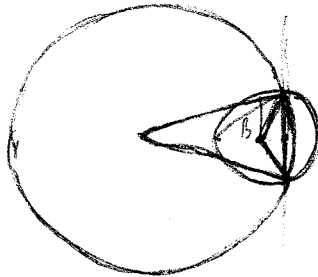
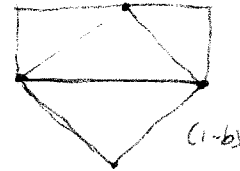
$$= \frac{2b - 4b + 2b^2 - a^2 - 1 + 2b}{2b(1-b)}$$

$$= \frac{1 - 2b + 2b^2 - a^2}{2b(1-b)}$$

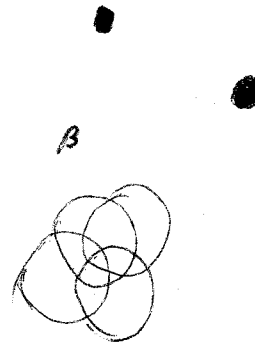
Opp = ~~not a triangle~~

$$+ \cos \alpha (2\pi - \alpha) a^2$$

$$+ \cos \beta (2\pi - \beta) b^2$$



x





dan

Deze reeks groeit minstens net als  $2^{\frac{n}{2}}$ 

0

1

0 1

0 1 1

0 0 1

0 1 1 1

0 0 1 1

0 0 0 1

} aantal kanten van af in line  
het getal in priemfactoren  
ge splits kan worden

Dit is een zeer interessante functie

$p(n)$  = aantal rotatie-verschillende ~~patronen~~ binaire  
patronen van lengte  $n$

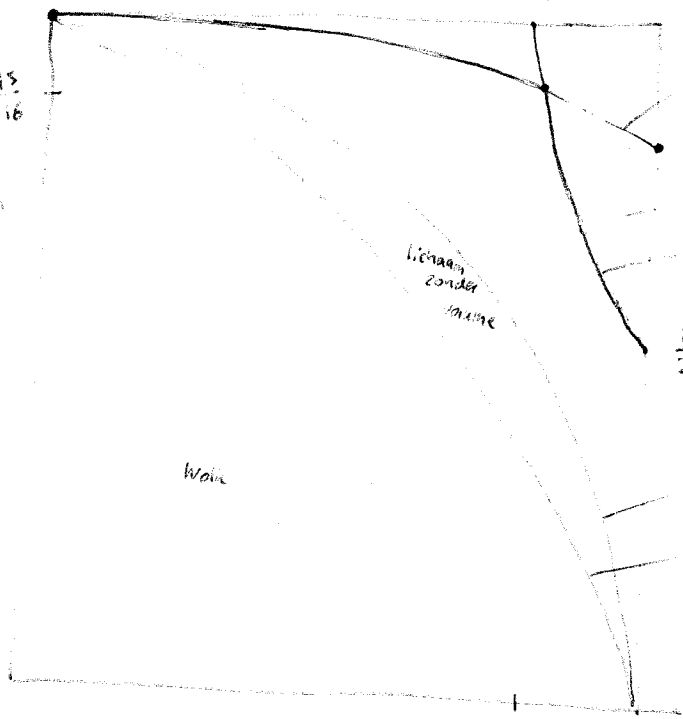
$p(n, k)$  = aantal rotatie-verschillende  $k$ -aire patronen  
van lengte  $n$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sim 1.73205 \quad \text{analyse} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$0.9375 = \frac{15}{16}$$

b  
↑



$$a^2 b^2 - 4ab + 4 = 0$$

$$2(\sqrt{2}-1) \sim 0.8284271$$

lichaam met volume

$$2a^3 b = 1$$

$\frac{1}{2}$

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$a^4 + b^4 = 1$$

$$\rightarrow a \frac{2}{\sqrt[3]{15}} \sim 0.810961$$

verzameling deliponden

$$\left\{ \begin{pmatrix} a^n b^m \cos(n\varphi) - 1 & -a^n b^m \sin(n\varphi) \\ a^n b^m \sin(n\varphi) & a^n b^m \cos(n\varphi) - 1 \end{pmatrix} D \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1 + a^{2n} b^{2m} - 2a^n b^m \cos(n\varphi)} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} D \in \{0, 1\}^k, k \in \mathbb{N} \\ n = \text{aantal } 0 \text{ in } D \\ m = \text{aantal } 1 \text{ in } D \end{array} \right\}$$

Er van uitgaand dat

$$a^n b^m \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & \sin(n\varphi) \\ -\sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + D \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

met  $n = \text{aantal } 0 \text{ in } D$  en  $m = \text{aantal } 1 \text{ in } D$  is de formule voor de afbeelding behorend bij  $D$ .

```

proc fix_hool ( x, y, r, d%, n%)
  local deleter, h hcos, hsin
  deleter = 1 + r*r - 2*r*cos(n%*phi)
  hcos = (r*cos(n%*phi) - 1)/deleter
  hsin = (r*sin(n%*phi))/deleter
  plot = round(hcos*x - hsin*y), round(hsin*x + hcos*y)
  if d% > 0
    @fix_hool ( acosr*x + asinr*y, acosr*y - asinr*x, a*x, d%-1, n%+1)
    @fix_hool ( b*x+1-b, b*y, b*x, d%-1, n%)
  endif
  return

```

```

fix_hool ( 0, 0, 1, d d%, 0)

```

benijg

$$\exists x, y \in \mathbb{N} \quad (D_{a,b,q}(x) \cdot \frac{0}{0} = D_{a,b,q}(y) \cdot \frac{0}{0})$$

Punt

$L_{a,b,q}$  is geen volk

beijg

$$\exists x, y \in \mathbb{N} \quad (D_{a,b,q}(x) \cdot P_1$$

$$\exists k, l \in \mathbb{N}, P_1, P_2 \in \{ \frac{0}{0}, \frac{0}{0} \} \quad (D_{a,b,q}(2k) \cdot P_1 = D_{a,b,q}(2l+1) \cdot P_2$$

$$\exists k \in \{0, n\}^n$$

stelling

$$(\exists n, m \in \mathbb{N}, R_1 \in \{0, n\}^n \times \frac{0}{0}, R_2 \in \{0, n\}^m \times \frac{0}{0}, P_1, P_2 \in \{ \frac{0}{0}, \frac{0}{0} \})$$

$$(P_1 \neq D_2 \cdot \frac{0}{0} \wedge P_2 \neq \frac{0}{0}) = P_1 \cdot P_2$$

$\Rightarrow L_{a,b,q}$  is geen volk

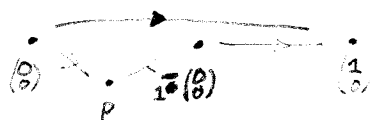
beijg

$D_2 P_1$  behoort tot de volk rond  $\frac{0}{0}$ ,

$D_2 P_2$  behoort tot de volk rond  $\frac{0}{0}$ .

In dien deze volken elkaar raken in het punt  $D_2 P_1 = D_2 P_2 = \frac{0}{0}$  betekend dit dat er een verbinding bestaat tussen  $\frac{0}{0}$  en  $\frac{0}{0}$  en deze verbinding loopt over het punt  $\frac{0}{0}$ .

De verbinding kon geconstrueerd worden met de volgende methode:  
indien  $P_1 = P_2 = \frac{0}{0}$  indien  $P_1 = \frac{0}{0}, P_2 = \frac{0}{0}$



Projecteer de lijn  $\frac{0}{0}$

indien  $P_1 = P_2 = \frac{0}{0}$



De punten verzameling die op deze wijze wordt geconstrueerd bevat  $\mathbb{R}$  punten, en is dus een lijn.

Is voldoende dat  $\frac{0}{0}$  en  $\frac{0}{0}$  verbonden zijn.

stelling

$$(D_1 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}^n \times \bar{0}, D_2 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}^m \times \bar{1}, P_1, P_2 \in \{(\bar{0}), (\bar{1})\})$$

$$(P_1[0:1] \neq D_2[1] \wedge D_1 P_1 = P_2 P_2)$$

Fout

$\Rightarrow L_{a,b,q}$  is geen wolk

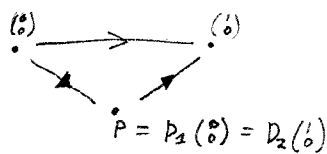
bewijs

$L_{a,b,q}$  is geen wolk indien er een lijn bestaat tussen  $(\bar{0})$  en  $(\bar{1})$ . Deze lijn bestaat indien hij geconstrueerd kan worden, en wel zo dat er een totale overlapping bestaat. Dit betekend dat er punten aangewezen dienen te worden waardoor de lijn loopt.

$$D_1 P_1 = P_2 P_2 = P$$

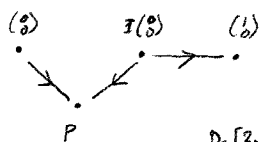
Er bestaan 3 gevallen:

\*  $P_1 = (\bar{0}), P_2 = (\bar{1})$  (Dit geval is gelijk aan  $P_2 = (\bar{0}), P_1 = (\bar{1})$ )



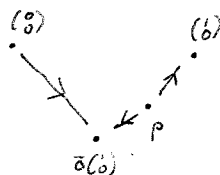
De verzameling  $L = \min D_1 \circ L \cup D_2 \circ L$  is de gevraagde lijn  $\cup \{(\bar{0}), P, (\bar{1})\}$

\*  $P_1 = P_2 = (\bar{0})$  en  $D_1[1] = \bar{1}$  en  $D_2[1] = \bar{0}$  (Dit geval is gelijk aan  $D_1[1] = \bar{0}$  en  $D_2[1] = \bar{1}$ )



De verzameling  $L = \min D_1 \circ L \cup P_2 \circ L \cup \bar{1} \circ L \cup \bar{0} \circ L$  is de gevraagde lijn  $\cup \{(\bar{0}), P, \bar{1}(\bar{0}), (\bar{1})\}$

\*  $P_1 = P_2 = (\bar{1})$  en  $D_1[1] = \bar{1}$  en  $D_2[1] = \bar{0}$  (Dit geval is gelijk aan  $D_1[1] = \bar{0}$  en  $P_2[1] = \bar{1}$ )



De verzameling

$L = \min D_1 \circ L \cup P_2 \circ L \cup \bar{0} \circ L$  is de gevraagde lijn  $\cup \{(\bar{0}), D_2 \bar{0}(\bar{1}), (\bar{1})\}$

Stelling

$\exists n, m \in \mathbb{N}, D_1 \subseteq \{0, 1\}^{<\omega}, D_2 \subseteq \{0, 1\}^{<\omega}, D_1 \neq D_2 \wedge D_1(0) = D_2(0)$

$\Rightarrow$   $\exists a, b, c$  is geen wolk

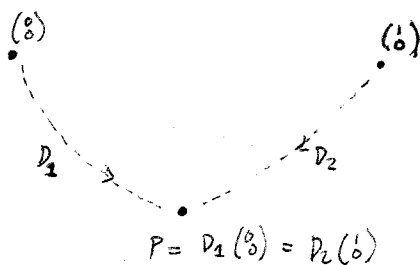
Fout

(maar erg dichtbij)

Bewijs

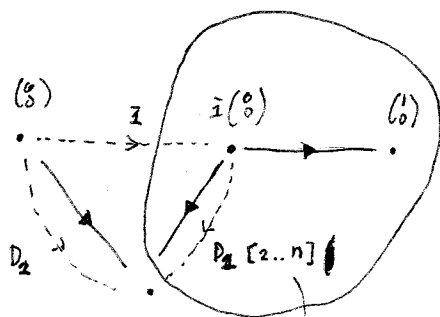
$D_1, P_1$  behoudt tot de wolk rond  $(0)$ , en  $D_2, P_2$  behoudt tot de wolk rond  $(1)$ .

~~$D_1(0) = D_2(0) = P$~~

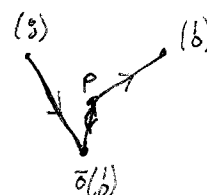


$D_1(0)$

$$L = \min D_1 \circ L \cup D_2 \circ L \cup \{P\}$$



moet eindigen met  $D_1[n] =$



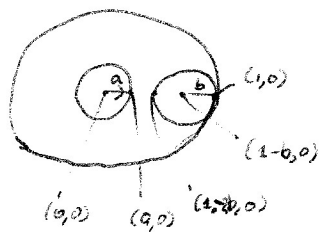
$$D_1[a] \rightarrow \bar{1} \wedge D_2[m] \rightarrow \bar{0}$$

$$\begin{aligned} & (P_1 = (0) \wedge P_2 = (1) \wedge D_1[1] \neq D_2[1]) \\ \vee & (P_1 = (0) \wedge P_2 = (0) \wedge D_1[1] = \bar{1} \wedge D_2[1] = \bar{0}) \\ \vee & (P_1 = (1) \wedge P_2 = (0) \wedge D_1[1] = \bar{0} \wedge D_2[1] = \bar{1}) \end{aligned}$$

stelling

$a, b, \varphi$  met  $a + 2b < 1$  zijn waken

bewijs



duus  $a + 2b < 1$   
circels raken elkaar  
niet



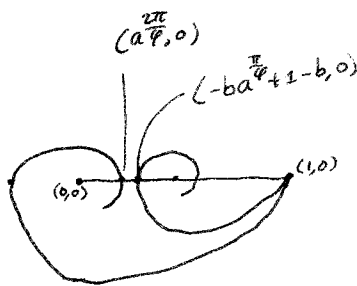
stelling

$$b + a^{\frac{\pi}{\varphi}} < 1$$

$$\text{en } (ba^{\frac{\alpha}{\varphi}}(1+a^{\frac{\pi}{\varphi}}))^2 < (1-b)^2(a^2-2a\cos\varphi+1)$$

$$\text{met } \alpha = \arccos\left(-\frac{1-a\cos\varphi}{\sqrt{a^2-2a\cos\varphi+1}}\right)$$

 geldt  $L_{a,b,\varphi}$  is een wolk

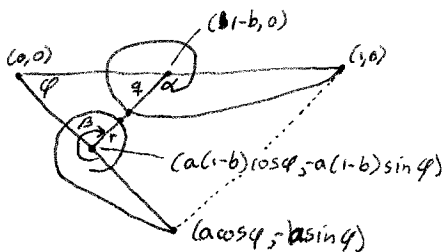
bewijs eerste voorwaarde


$$a^{\frac{2\pi}{\varphi}} < -ba^{\frac{\pi}{\varphi}} + 1 - b$$

$$b < \frac{1-a^{\frac{2\pi}{\varphi}}}{1+a^{\frac{\pi}{\varphi}}}$$

$$b < 1 - a^{\frac{\pi}{\varphi}}$$

$$b + a^{\frac{\pi}{\varphi}} < 1$$

bewijs tweede voorwaarde

 afstand tussen  $(1-b, 0)$  en  $(a(1-b)\cos\varphi, a(1-b)\sin\varphi)$   
 $= (1-b)\sqrt{a^2-2a\cos\varphi+1}$ 

 bereken afstand tussen  $(1, 0)$  en  $(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$ 

$$\sqrt{(a\cos\varphi-1)^2 + a^2\sin^2\varphi} = \sqrt{a^2\cos^2\varphi - 2a\cos\varphi + 1 + a^2\sin^2\varphi} = \sqrt{a^2-2a\cos\varphi+1}$$

 afstand  $(0,0)$  en  $(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$  is  $a$ 

$$\cos(\pi-\alpha) = \frac{a^2-2a\cos\varphi+1+1-a^2}{2\sqrt{a^2-2a\cos\varphi+1}} = \frac{1-a\cos\varphi}{\sqrt{a^2-2a\cos\varphi+1}}$$

~~erf~~

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1-a\cos\varphi}{\sqrt{a^2-2a\cos\varphi+1}}\right)$$

$$\beta - \pi + \varphi + \pi - \alpha = \pi$$

$$\beta = \pi + \alpha - \varphi$$

 de lengte van  $q$  is  $ba^{\frac{\alpha}{\varphi}}$ , de lengte van  $r$  is  $ba^{1+\frac{\beta}{\varphi}} = ba^{\frac{\pi+\alpha}{\varphi}}$ 

$$\text{nu moet gelden } ba^{\frac{\alpha}{\varphi}} + ba^{\frac{\pi+\alpha}{\varphi}} < \sqrt{a^2\cos^2\varphi - 2a\cos\varphi + 1} \cdot (1-b)$$

$$\text{dus } (ba^{\frac{\alpha}{\varphi}}(1+a^{\frac{\pi}{\varphi}}))^2 < (1-b)^2(a^2-2a\cos\varphi+1)$$

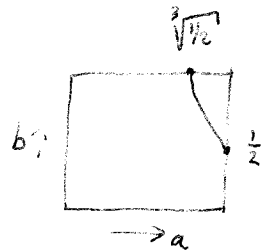
□

stelling voor

voor  $2a^3b > 1$  en  $b < 1$

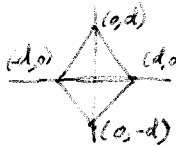
geldt dat  $L_{a,b,\frac{\pi}{2}}$  heeft volume

$$\text{met } V(L_{a,b,\frac{\pi}{2}}) \geq 2 \left( \frac{a^3(1-b)}{1-a^3b} \right)^2$$

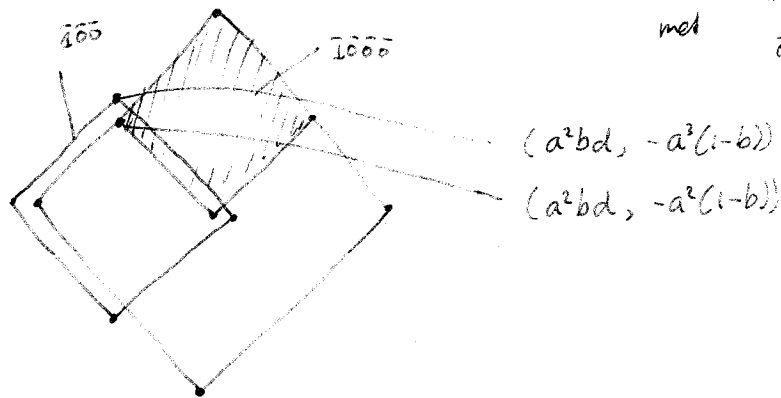


bewijs

stel  $d = \frac{a^3(1-b)}{1-a^3b}$

het figuur  is zelf overdekkend door  $(\bar{1}, \bar{1}\bar{0}, \bar{1}\bar{0}\bar{0}, \bar{1}\bar{0}\bar{0}\bar{0})$

als aan de  $\mathbb{G}^3$  wordt voldaan dat  $\bar{1}\bar{0}\bar{0}$  en  $\bar{1}\bar{0}\bar{0}\bar{0}$  overlappen



$$\bar{1}: p \mapsto pb + \begin{pmatrix} 1-b \\ 0 \end{pmatrix}$$

met  $\bar{0}: p \mapsto a \cdot \text{rot}(\varphi) \cdot p$

Deze twee overlappen mits geldt:  $a^3(1-b) - a^3bd < a^2bd - a^2(1-b)$

$$\text{dus } (a^3 + a^2)(1-b) < (a^3 + a^2)bd$$

$$(1-b) < b \cdot \frac{a^3(1-b)}{1-a^3b}$$

$$0 < \frac{b \cdot a^3 - 1 + a^3b}{1-a^3b}$$

$$0 < 2a^3b - 1 \rightarrow 2a^3b > 1$$

□



stelling

oppervlakte  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

voor  $a^6 b^2 - 4(1-b) > 0$  en  $b < 1$

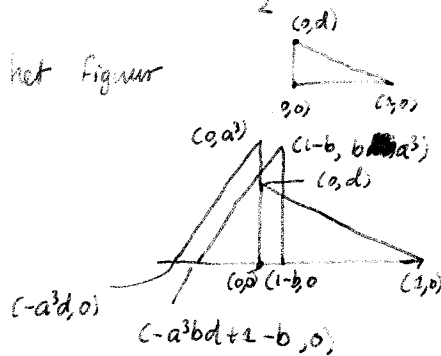
geldt dat  $L(a, b, \pi)$  heeft ~~een~~ oppervlakte

$$\text{met } V(L(a, b, \pi)) \geq \frac{1}{4} (1+a+a^2+a^3) (a^3 b + \sqrt{a^6 b^2 - 4(1-b)})$$

bewijs

stel  $d = \frac{a^3 b + \sqrt{a^6 b^2 - 4(1-b)}}{2}$

het figuur



is zelf overdekkend door  $\vec{i}, \vec{0}, \vec{0}, \vec{i}$

de lijn door de punten

$$(-a^3 b d + 1 - b, 0) \text{ en } (1 - b, a^3)$$

voldoet aan de vergelijking

$$-x + dy = a^3 b d - 1 + b$$

Nu moet het punt  $(0, d)$  onder deze lijn liggen,

$$\text{oftewel } d^2 < a^3 b d - 1 + b$$

$$-d^2 + a^3 b d - 1 + b > 0$$

deze vergelijking heeft alleen oplossingen mits  $a^6 b^2 - 4(1-b) > 0$

als aan deze voorwaarde is voldaan is de vergelijking groter dan 0 voor de waarden uit het interval  $\left[ \frac{a^3 b^2 + \sqrt{a^6 b^2 - 4(1-b)}}{2}, \frac{a^3 b^2 + \sqrt{a^6 b^2 - 4(1-b)}}{2} \right]$

we kiezen nu  $d = \frac{a^3 b + \sqrt{a^6 b^2 - 4(1-b)}}{2}$

$$d \leq a^3 \text{ daar } d = \frac{1}{2} a^3 b + \frac{1}{2} \sqrt{a^6 b^2 - 4(1-b)} < \frac{1}{2} a^3 b + \frac{1}{2} a^3 b = a^3 b < a^3 \text{ als } b < 1$$

aan



Stelling

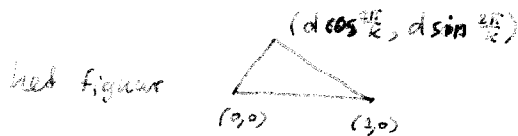
$$\text{voor } (a^{k-1}b + 2(1-b)\cos(\frac{2\pi}{k}))^2 - 4(1-b) > 0$$

geldt dat  $(a, b, \frac{2\pi}{k})$  heeft unieke opervariante

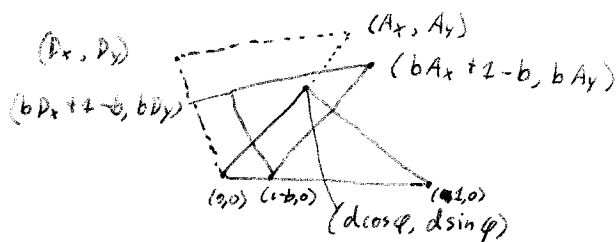
$$\text{met } V(a, b, \frac{2\pi}{k}) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} a^i \cdot \text{d} \cdot \sin \frac{2\pi}{k}$$

$$\text{waarbij } d = \frac{(a^{k-1}b + 2(1-b)\cos\varphi) + \sqrt{(a^{k-1}b + 2(1-b)\cos\varphi)^2 - 4(1-b)}}{2}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{k}$$

bewijs



is zelf overdekkend door  $\bar{1}, \bar{o}^{k-1}\bar{1}, \bar{o}$



$$A_x = a^{k-1} \cos \varphi$$

$$A_y = a^{k-1} \sin \varphi$$

$$D_x = da^{k-1} \cdot \cos 2\varphi$$

$$D_y = da^{k-1} \cdot \sin 2\varphi$$

de lijn door de punten  $(bD_x+1-b, bD_y)$  en  $(bA_x+1-b, bA_y)$  voldoet aan de volgende vergelijking

$$(bD_y - bA_y)x + (bA_x - bD_x)y = (bA_x+1-b)bD_y - bA_y(bD_x+1-b)$$

Nu moet het punt  $(d\cos\varphi, d\sin\varphi)$  onder deze lijn liggen, oftewel

$$(D_y - A_y)d\cos\varphi + (A_x - D_x)d\sin\varphi < (bA_x+1-b)D_y - A_y(bD_x+1-b)$$

$$\begin{aligned} a^{k-2}\cos\varphi\sin\varphi d^2 - a^{k-2}\cos\varphi\sin\varphi d + a^{k-2}\sin\varphi\cos\varphi d - a^{k-2}\sin\varphi\cos\varphi d^2 \\ - a^{k-2}b\cos\varphi\sin\varphi d - a^{k-2}(1-b)\sin\varphi d + a^{2(k-2)}b\sin\varphi\cos\varphi d - (1-b)\sin\varphi > 0 \end{aligned}$$

$$d^2(\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) +$$

$$d(a^{k-2}b(-\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) - (1-b)\sin\varphi) + (1-b)\sin\varphi < 0$$

$$-d^2 + (a^{k-1}b + 2(1-b)\cos\varphi)d - 1 + b > 0$$

deze vergelijking heeft alleen oplossingen mits  $(a^{k-1}b + 2(1-b)\cos(\frac{2\pi}{k}))^2 - 4(1-b) > 0$

Als hieraan voldaan is, kiezen we:

$$d = \frac{(a^{k-1}b + 2(1-b)\cos\varphi) + \sqrt{(a^{k-1}b + 2(1-b)\cos\varphi)^2 - 4(1-b)}}{2}$$

problemen  $d < a^{k-1}$ ?  $\rightarrow$  levert extra eis op??

B is voldoende om onder driehoekje op te vullen?? hoogstwaarschijnlijk wel.

2.6.17.3

~~2.6.17.3~~

oppervlakte  $\varphi \in \mathbb{Q}$

gegeven  $2 \leq k < n$  en  $\text{ggd}(k, n) = 1$

$$[m, l] \text{ mod } k = [k-1, a, k]$$

$$m, l = k-1 + a + k \quad na \leq n$$

$$\text{voor } (a^{m-1}b + 2(1-b)\cos(\frac{\pi}{2}))^2 - 4(1-b) > 0$$

geldt dat  $L(a, b, \frac{\pi}{2})$  heeft oppervlakte

$$\text{met } \forall L(a, b, \frac{\pi}{2}) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} a^i \cdot d \cdot \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\text{waarbij } d = \frac{(a^{m-1}b + 2(1-b)\cos(\frac{\pi}{2})) + \sqrt{(a^{m-1}b + 2(1-b)\cos(\frac{\pi}{2}))^2 - 4(1-b)}}{2}$$

voor alle  $q \in \mathbb{R}$

geldt  $L(a, b, q, \pi)$  heeft oppervlakte

$$\text{mits } (a^{m-1}b + 2(1-b)\cos(\frac{\pi}{2}))^2 - 4(1-b) > 0$$

waarbij  $q = \frac{k}{2}$  zodanig dat  $\text{ggd}(k, n) = 1$   $2 \leq k < n$   $k, n \in \mathbb{N}$

en  $m$  is de kleinste  $m$ , die voldoet aan  $m, l = k-1 \text{ mod } k$

Als dit waar is

dan geldt ook:

$$(a^k b + 2(1-b)\cos \frac{\pi}{2})^2 - 4(1-b) > 0 \quad \text{Bij voldoende eis.}$$

$$2ab > 1 \quad \text{voor } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$b = \frac{1}{2a}$$

$$a^2 + \left(\frac{1}{4a^2}\right) = 1$$

$$a^2 + \frac{1}{4a^2} = 1$$

$$a^4 + \frac{1}{4} - a^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 1}}{2}$$

$a$

$$a = \sqrt{1}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}$$



stelling

$$\text{voor } p = (ab + 2(1-b)\cos\varphi)^2 - 4(1-b) > 0$$

$$\text{en } ab + 2(1-b)\cos\varphi + \sqrt{p} \geq 2\left(\frac{1-b}{b}\right) \quad \text{en } a^{\frac{\varphi}{\pi-\varphi}} > 0$$

geldt dat  $L_{a,b,\varphi}$  heeft ~~een~~ oppervlakte

$$\text{en } \mathcal{O}(L_{a,b,\varphi}) \geq 2\pi \cdot \left(ab + 2(1-b)\cos\varphi + \sqrt{p}\right)^{\frac{\pi}{\varphi}}$$

bewijs  
(veel pagina's)

$$\text{voor } p = (ab + 2(1-b)\cos\varphi)^2 - 4(1-b) > 0$$

$$\text{en } d = \frac{ab + 2(1-b)\cos\varphi + \sqrt{p}}{2}$$

$$\text{en } a^{\frac{\pi-\varphi}{\varphi}} bd + 1 - b < a$$

$$d + \frac{1-b}{b} a^{\frac{\varphi}{\pi-\varphi}} > 0$$

$$a^{\frac{\pi-\varphi}{\varphi}} bd > 1-b$$

$$a d > \frac{1-b}{a^{\frac{\pi-\varphi}{\varphi}} b}$$

$$d > \frac{1-b}{b} a^{\frac{\varphi}{\pi-\varphi}}$$

~~de~~

$$-a^{\frac{\pi-\varphi}{\varphi}} bd + 1 - b < 0$$

$$a^{\frac{\pi-\varphi}{\varphi}} bd + 1 - b > 0$$

$$a^{\frac{\pi-\varphi}{\varphi}} bd > 1-b$$

$$d > \frac{1-b}{b} a^{\frac{\varphi}{\pi-\varphi}}$$



$$a=1 \quad (b + 2(1-b)\cos\varphi)^2 - 4(1-b) > 0$$

$$b^2 + 2b(1-b) + 2(1-b)^2\cos^2\varphi - 4 + 4b > 0$$

$$b^2 + 2b - 2b^2 + 2\cos^2\varphi - 4b\cos^2\varphi + 2b^2\cos^2\varphi - 4 + 4b > 0$$

$$b^2(1-2+2\cos^2\varphi) + b(2-4\cos^2\varphi+4) + (2\cos^2\varphi-4) > 0$$

$$b^2(-1+2\cos^2\varphi) + b(6-4\cos^2\varphi) + (-4+2\cos^2\varphi) > 0$$

$$(6-4\cos^2\varphi)^2 - 4(-1+2\cos^2\varphi)(-4+2\cos^2\varphi) > 0$$

$$36 - 48\cos^2\varphi + 16\cos^4\varphi - 4(4 - 2\cos^2\varphi - 8\cos^2\varphi + 4\cos^4\varphi) > 0$$

$$36 - 48\cos^2\varphi + 16\cos^4\varphi - 16 + 8\cos^2\varphi + 32\cos^2\varphi - 16\cos^4\varphi > 0$$

$$20 - 40\cos^2\varphi +$$

$$16\cos^4\varphi - 16\cos^4\varphi - 40\cos^2\varphi + 32\cos^2\varphi - 20 > 0$$

$$4\cos^4\varphi - 4\cos^2\varphi - 10\cos^2\varphi + 8\cos^2\varphi - 5 > 0$$

dan bereken of een oplossing

stelling

$$k, l \in \mathbb{N} \quad 1 < l < k, \quad k > 2, \quad \text{ggd}(k, l) = 1$$

$$\text{met } \frac{1}{2} a^{(k-1)} b > 1 \quad \left( \text{voor } \frac{1}{2} a^{(k-1)} b > 1 \right)$$

geldt dat  $L_{a,b,\frac{\pi}{k}}$  heeft volume

en

$$V(L_{a,b,\frac{\pi}{k}}) \geq \frac{k}{2} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \left( \frac{a^{(k-1)}(1-b)}{1 - a^{(k-1)}b} \right)$$

bewijs

analooq aan bovenstaande stelling

$$V(L_{a,b,\frac{\pi}{k}}) \geq \frac{k}{2} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \left( \frac{a^{(k-1)}(1-b)}{1 - a^{(k-1)}b} \right)$$

bewijs

analooq aan bovenstaande stelling



Stellingwolk / geen wolk $\varphi \in \mathbb{Q}$  $\forall q \in \mathbb{R}_{(0,1)}$  waarbij  $q = \frac{k}{l}$  met  $\text{ggd}(l, 2) = 1$ 

$$(a^{\frac{k}{2}} + b^{\frac{k}{2}}) \geq 1 \quad \wedge \quad k \text{ is even}$$

$$\vee (a^{\frac{k}{2}} + b^{\frac{k}{2}}) \geq 1 \quad \wedge \quad k \text{ is oneven}$$

$$\Rightarrow L(a, b, q \cdot 2\pi) \text{ is geen wolk}$$

bewijs

$$(a^{\frac{k}{2}} + b^{\frac{k}{2}}) \geq 1 \quad \wedge \quad k \text{ is even}$$

$$\Rightarrow \{(x, 0) \mid x \in [-a^{\frac{k}{2}}, 1]\} \subset L(a, b, q \cdot 2\pi)$$

en

$$(a^{\frac{k}{2}} + b^{\frac{k}{2}}) \geq 1 \quad \wedge \quad k \text{ is oneven}$$

$$\Rightarrow \{(x, 0) \mid x \in [0, 1]\} \subset L(a, b, q \cdot 2\pi)$$

Want alle punten van dit lijnstuk kunnen op zichzelf afgebeeld worden via ten hoogste  $k$  afbeeldingen.

Als deze lijn zouken er in zitten, dan ligt ieder punt op een lijnstuk, verbonden met ~~andere~~ andere punten  $\Rightarrow$  alle punten zijn met elkaar verbonden.

Resultaten:

$$a^2 + b^2 < 1 \Rightarrow \text{geen oppervlakte}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad a^2 b^2 - 4(1-b) > 0 \Rightarrow \text{oppervlakte}$$

$$a^6 b^2 - 4(1-b) > 0 \Rightarrow \text{oppervlakte}$$

$$2a^3 b > 1 \text{ en } b < 1 \Rightarrow \text{oppervlakte}$$

algemener

$$\varphi = \frac{2\pi}{k} \quad (a^{k-1} b + 2(1-b) \cos(\frac{2\pi}{k}))^2 - 4(1-b) > 0 \Rightarrow \text{oppervlakte.}$$

$$\frac{1}{2} a^{(k-1)} b > 1$$

$$D = (ab + 2(1-b) \cos \varphi)^2 - 4(1-b)$$

$$D > 0 \text{ en } ab + 2(1-b) \cos \varphi + \sqrt{D} - 2\left(\frac{1-b}{b}\right) a^{\frac{\varphi}{\pi-\varphi}} > 0$$

$$\Rightarrow \text{oppervlakte.}$$

$$\rightarrow k = 4 \quad (a^3 b + 2(1-b) \cos(\frac{2\pi}{4}))^2 - 4(1-b) > 0$$

$$\Rightarrow a^6 b^2 - 4(1-b) > 0$$

$$(a^{k-1} b + 2(1-b) \cos(\frac{2\pi}{k}))^2 - 4(1-b) > 0$$

~~$$(a^{k-1} b + 2(1-b) \cos(\frac{2\pi}{k}))^2 - 4(1-b) > 0$$~~

$$a^{k-1} b + 2 \cos \frac{2\pi}{4} - b \cos(\frac{2\pi}{4})$$

$$(b(a^{k-1} - \cos(\frac{2\pi}{4})) + 2 \cos \frac{2\pi}{4})^2 - 4 + b = 0$$

$$b^2 (a^{k-1} - \cos(\frac{2\pi}{k}))^2 + b((a^{k-1} - \cos(\frac{2\pi}{4})) 4 \cos \frac{2\pi}{4} + 1) - 4 = 0$$

$$b^2 - 4(a^{k-1} - \cos(\frac{2\pi}{k})) 4 \cos \frac{2\pi}{4} + 1 \pm \sqrt{4(a^{k-1} - \cos(\frac{2\pi}{k})) 4 \cos \frac{2\pi}{4} + 1} + 4b(a^{k-1} - \cos(\frac{2\pi}{k}))$$